الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2017

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

## الموضوع الأول

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

نعتبر النقطتين $A(-1;1;-2)$ و $B(1;-3;-4)$ والمستقيم $(\Delta)$ ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-t+2 \; ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=2t-4 \end{cases}$

وليكن $(\Delta')$ المستقيم الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع توجيه له .

1) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ليكن $(P)$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ .

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P)$ ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

3) نسمّي $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $AM^2+BM^2=20$ .

بيّن أنّ $(S)$ سطح كرة مركزها منتصف القطعة $[AB]$ ونصف قطرها 2 .

4) حدّد الوضع النسبي للمستوي $(P)$ وسطح الكرة $(S)$ .

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

1) نعتبر المعادلة : $104x-20y=272\cdots\cdots(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث $x$ و $y$ عددان صحيحان .

أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بيّن أنّ المعادلة $(E)$ تقبل حلولا.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإنّ $x\equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $(E)$ .

2) $\lambda$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان.

عيّن $\alpha$ و $\beta$ ، ثم اكتب $\lambda$ في النظام العشري .

3) تحقق أنّ كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي، ثم عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m-d=2017 \quad \text{حيث} \quad d=PGCD(a;b)\ ,\ m=PPCM(a;b)$$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=2(1-i)$ .

أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى دائرة $(\Omega)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا .

جـ) نسمّي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $z=z_C-k\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)$ ، مع $k$ يمسح $\mathbb{R}_+$

تحقّق أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عيّن وأنشئ $(\Gamma)$.

3) $r$ الدوران الذي مركزه النقطة $O$ وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ ، $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $O$ ونسبته $-2$ .

عيّن طبيعة التحويل $h\circ r$ وعناصره المميّزة ، ثم استنتج صورة الدائرة $(\Omega)$ بالتحويل $h\circ r$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ .

$(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1–أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.

2) اكتب معادلة $(T)$ مماس المنحني $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) $h$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$ .

ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ على المجال $[0;+\infty[$.

4) ارسم المماس $(T)$ والمنحني $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$ .

5) نعتبر $m$ وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... $(E)$

ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$.

6) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة $g$ .

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل $u_0=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=7u_n+8$.

1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $3u_n=7^{n+1}-4$ .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n=1+7+7^2+......+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ .

أ) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ ثم جد علاقة بين $S_n$ و $S'_n$.

ب) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $7^n$ على 5.

ب) عيّن قيم $n$ الطبيعية حتى يكون $S'_n$ قابلا للقسمة على 5.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، $(P)$ مستو تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2 \\ y=3t+4\lambda-3 \\ z=3t+4\lambda-1 \end{cases}$

حيث $t$ و $\lambda$ عددان حقيقيان .

1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ .

2) ليكن $\alpha$ عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ، ولتكن $(E_\alpha)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث

$$x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0 \ .$$

أ) بيّن أنّ: من اجل كل $\alpha$ من المجال السابق ، $(E_\alpha)$ هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها $\omega_\alpha$ بدلالة $\alpha$ ونصف قطرها $R$ .

ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي $\alpha$ الوضع النسبي للمستوي $(P)$ و سطح الكرة $(E_\alpha)$ .

3) في الحالة التي يكون فيها المستوي $(P)$ مماسا لسطح الكرة $(E_\alpha)$

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة $\omega_\alpha$ والعمودي على المستوي $(P)$

واستنتج إحداثيات $I$ نقطة تماس $(E_\alpha)$ مع المستوي $(P)$.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ و $I$ ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$ .

1) اكتب $z_A$ و $z_C$ على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $B$ ويحول $A$ إلى $I$.

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي $T_n$ كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

عيّن قيم $n$ حتى يكون $T_n$ تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$ .

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ .

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x} \;;\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أثبت أن الدالة $f$ مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$ .

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) لتكن الدالة $h$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-\ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما ، $h(x)>0$ ،

واستنتج وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=1$ .

ب) ارسم $(C_f)$ .   ( نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$ )

5) لتكن الدالة $F$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ .

– بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \geq 1$ ، $\dfrac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ .

– اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

**انتهى الموضوع الثاني**