

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ،

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$ ،

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

(2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على \mathbb{N} .

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

(أ) بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2; -1; 1)$ ، $B(-1; 2; 1)$ ، $C(1; -1; 2)$ و $D(1; 1; 1)$.

(1) أ) تحقق أن النقط A ، B و C تُعين مستويا .

(ب) بين أن $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

(ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

(أ) احسب إحداثيات G .

(ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$.

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

- (أ) أثبت أن معادلة (Γ) هي : $6x - 4y + 2z + 3 = 0$.
 (3) بين أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.
 (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C, D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i), z_B = \bar{z}_A, z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.
 أ) اكتب z_A, z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

- (بين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

(احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overline{CA}; \overline{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A, C, C' في استقامة.

(عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسّر النتيجة هندسياً.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا r ، حيث $e^{-0.4} < r < e^{-0.3}$.
 (3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتقادا على المنحنى (C_f) .

(ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بحددها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2^{-n}}}$.
(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري) .
1) بين أن (u_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.
2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
(II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ (\ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).
1) عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .
2) أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.
(عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1; -1; -2)$ ، $B(1; -2; -3)$ و $C(2; 0; 0)$.
1) أ) برهن أن A ، B و C ليست في استقامية .
ب) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (ABC) .
(تحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:
 $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$ و $(P): x - y - 2z + 5 = 0$.
برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيط: $(t \in \mathbb{R})$:
$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .
4) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M, (P))$ المسافة بين M و المستوي (P) و $d(M, (Q))$ المسافة بين M و المستوي (Q) ، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:
 $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z حيث:
 $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$
2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)، تعطى النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب .

- (أ) أنشئ النقط A ، B و C .
 (ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
 احسب مساحة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{f}{2}$.

(أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S .

(ب) بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

(4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - لنكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا r حيث $0,7 < r < 0,8$.

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

(ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

(ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(r) \approx -0,1$)

(4) احسب $f(1)$ ثم حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$.

(5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) لنكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) - 2$.

(ب) استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .