الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2012

الشعبة : علوم تجريبية

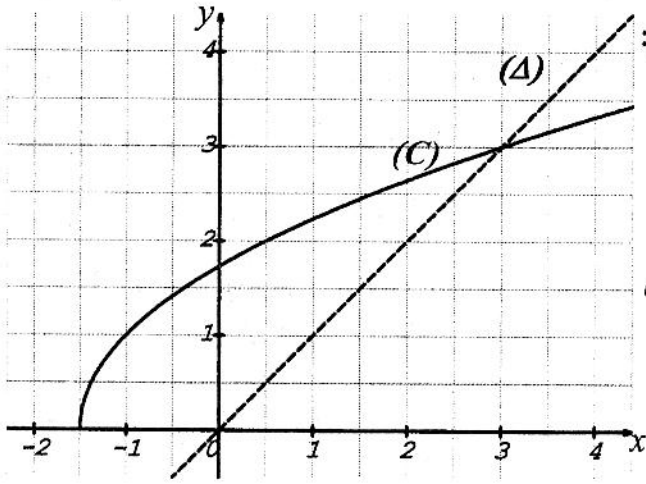
اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.



1) لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ ، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

أ) – أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3. (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) – ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

3) أ) – ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) – استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z\neq 2-3i$).

– حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

– تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب: $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة: $14x+16y+13z-47=0$ ، و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-1;3;1)$.

1) أ – تحقق أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب – بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P).

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3) أ – اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب – تحقق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

جـ – احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ <}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3{,}5<\alpha<-3{,}4$ و $-1{,}1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3 < u_n < 4$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدّها الأول.

ب) اكتب كلاًّ من v_n و u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$.

اكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أن $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.

2) بيّن أنّ $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث: $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$.

أ- تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب- بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

جـ- استنتج أنّ المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

أ- تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ-اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب-اكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ-استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عيّن $z_{A'}$، لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أنّ $0{,}5<\alpha<0{,}6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

4) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1{,}6<x_1<-1{,}5$ و $1{,}5<x_2<1{,}6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ-عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب-استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.