الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2012

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

أ- اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$.

ب- عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

جـ- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

أ- بيّن أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- بيّن أن حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2011x-1432y=31$ ... (1).

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α، β، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن α ، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(3;0;0\right)$، $B\left(0;4;0\right)$ و $C\left(2;2;2\right)$.

1) بيّن أن النقط A، B، C ليست في استقامية وأن الشعاع $\vec{n}\left(4;3;-1\right)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A، B، C.

3) أ- بيّن أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$.

ب- بيّن أنّ: $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$.

جـ- بيّن أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4) احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^{x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,8<\alpha<0,9$.

3) عيّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (وحدة الطول $2cm$).

1) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq U_n<\alpha$.

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثّل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2، ثم خمّن اتجاه تغير (U_n).

3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

– بيّن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B، C و D.

3) نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O.

أ- بيّن أن: $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

ب- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث AEC.

د- H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

– عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(1;1;1)$، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2) (P_2) المستوي الذي: $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

– بيّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) بيّن أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4) أ- عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$.

ب- احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

جـ- ما هي طبيعة المثلث ODE؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=6u_n-9$.

1) أ- احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، u_4 على 7.

ب- خمّن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b\,[7]$.

2) أ- برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2}\equiv u_n\,[7]$.

ب- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2\,[7]$، ثم استنتج أن: $u_{2k+1}\equiv 3\,[7]$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\frac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب، بدلالة n، كلا من u_n و S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ كما يلي : $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيِّن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8<\alpha<-0,7$.

3) عيِّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ بـِ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h.

II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيِّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لِـ(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3[$، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيّن أن : $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لِـ $f(\alpha)$.

جـ- احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3[$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5) ارسم (T) ، (T') و (C_f).

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.