

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

وزارة التربية الوطنية

دورة: جوان 2009

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة : رياضيات

المدة : 04 ساعات ونصف

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A = 5566$

(1) أ- أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن

$$A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$$

ب- احسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك

العدد A في نظام التعداد العشري.

(2) أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

تمرين 2: (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا تميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

(1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تمرين 3: (5 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطى

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

- 1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .
- أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.
- 2) نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D) .
- أ - بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P) .
- ب - اكتب معادلة للمستوي (P) .
- ج - بيّن أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M .
- د - عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (YOZ) .

تمرين 4: (6 نقاط)

- 1) نعرّف الدالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$.
- ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة على المحورين $3cm$.
- أ - ادرس تغيرات الدالة f .
- ب - أنشئ المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم.
- 2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بحدها الأول $U_0 = 5$ وبالعلاقة:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{5}{U_n} \right)$$

- أ - احسب U_1, U_2 .
- ب - استعمل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود U_0, U_1, U_2 على محور الفواصل.
- 3) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n \geq \sqrt{5}$.
- ب - بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟
- 4) أ - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $(U_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{5})$.
- ب - استنتج أن $(U_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - \sqrt{5})$. ما هي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ؟

الموضوع الثاني

تمرين 1: (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$
 (2) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
 أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقياً سالباً تماماً.

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$.

- (3) في المستوى المركب نعتبر النقط A, B, C صور الأعداد المركبة $1, i$ و z_0 على الترتيب.
 أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) و استنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

تمرين 2: (5 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1$.
 (V_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n = U_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

- (1) عين α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.
 (2) احسب كلا من U_n و V_n بدلالة n .

(3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ و $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

- (4) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
 ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفاً للعدد 5.

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستويين (P_1) و (P_2) حيث

$$x + 2y - z - 2 = 0 \text{ معادلة للمستوي } (P_1)$$

$$\text{تمثيل وسيطي للمستوي } (P_2) \text{ و } \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

(1) اكتب معادلة للمستوي (P_2) .

(2) عين شعاعاً ناظماً \vec{n}_1 للمستوي (P_1) وشعاعاً ناظماً \vec{n}_2 للمستوي (P_2) .

(3) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

(4) أ- $A(3, 1, 1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) ثم المسافة d_2 بين A و (P_2) .

ب- استنتج المسافة d_1 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

(5) أ- عين تمثيلاً وسيطياً بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث λ عدد حقيقي.

ب- M نقطة كيفية من (Δ) ، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجاً ثانية المسافة بين A و (Δ) .

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

. (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .

(3) أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب .

ج- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

(4) أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تتعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x .

(5) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $g(x) = |f(x)|$.

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق .

- بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة طول المعادلة ذات المجهول x : $g(x) = m^2$.