

1. لدينا:  $3^0 \equiv 1 [10]$ ،  $3^1 \equiv 3 [10]$ ،  $3^2 \equiv 9 [10]$ ،  $3^3 \equiv 7 [10]$  و  $3^4 \equiv 1 [10]$ .

و منه من أجل كل عدد طبيعي  $k$  لدينا:

$3^{4k} \equiv 1 [10]$ ،  $3^{4k+1} \equiv 3 [10]$ ،  $3^{4k+2} \equiv 9 [10]$  و  $3^{4k+3} \equiv 7 [10]$ .

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	[10]

2. لدينا:  $63 \equiv 3 [10]$  و بما أن  $9 \equiv -1 [10]$  فإن  $9^{2001} \equiv -1 [10]$  و عليه  $63 \times 9^{2001} \equiv -3 [10]$ .

نلاحظ أن  $7 \equiv -3 [10]$  و منه  $7^{1422} \equiv (-3)^{1422} [10]$  أي  $7^{1422} \equiv 3^{1422} [10]$ .

و بما أن  $1422 = 4 \times 355 + 2$  فإن  $3^{1422} \equiv 9 [10]$  أي  $7^{1422} \equiv 9 [10]$ .

لدينا هكذا  $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12 [10]$  أي  $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8 [10]$ .

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد  $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$  على 10 هو 8.

3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون:  $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1} [10]$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3n \times (3^2)^n + (-3)^{2n+1} [10]$$

$$\equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1} [10] \quad \text{لدينا:}$$

$$\equiv (n-1) \times 3^{2n+1} [10]$$

4. تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون:  $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10] \text{ يعني } (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0 [10]$$

لدينا:  $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$  و بما أن  $9 \equiv -1 [10]$  فإن  $9^n \equiv (-1)^n [10]$  إذن  $3^{2n+1} \equiv 3(-1)^n [10]$

لدينا هكذا:  $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 3(-1)^n (n-1) [10]$  و عليه:

$$(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0 [10] \text{ يعني } (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0 [10]$$

بما أن  $3(-1)^n \equiv 3 [10]$  أو  $3(-1)^n \equiv -3 [10]$  فإن:  $3(-1)^n (n-1) \equiv 0 [10]$  يعني  $3(-1)^n (n-1) \equiv 0 [10]$

يكون  $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$  من أجل  $n \equiv 1 [10]$  أي  $n = 10\alpha + 1$  مع  $\alpha$  عدد طبيعي.

التمرين الثاني:

1. لدينا:  $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$

إذن العدد المركب  $i$  حل للمعادلة (E).

2. تعيين الأعداد الحقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  بحيث من أجل كل عدد مركب  $z$  لدينا :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

لدينا:  $(z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-ai)z^2 + (c-bi)z - ci$

بالمطابقة ينتج:  $\begin{cases} a=1 \\ b-ai = -4-i \\ c-bi = 13+4i \\ ci = 13i \end{cases}$  أي  $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$ . نستنتج هكذا أنه من أجل كل عدد مركب  $z$ :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 4z + 13)$$

3. استنتاج حلول المعادلة (E):

$$(E) \text{ تكافئ } z = i \text{ أو } z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\text{نحل المعادلة: } (1) \dots z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\Delta = -36 = (6i)^2$$

حلا المعادلة (1) هما إذن:  $2+3i$  و  $2-3i$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي:  $\{i; 2-3i; 2+3i\}$ .

(ب)  $r$  هو الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

1. عبارته في المستوي المركب هي:  $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$  أي:  $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z_B$

و منه:  $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \frac{4+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$

لدينا:  $z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \frac{4+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$  و منه:  $z_{A'} = 2 + (3-2\sqrt{2})i$

2. فعلا النقط  $A'$ ،  $B$  و  $C$  في استقامية لأن لها نفس الفاصلة 2.

ليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه  $B$  و الذي يحول النقطة  $C$  إلى  $A'$ . بفرض  $k$  نسبة التحاكي  $h$  تكون الكتابة المركبة للتحاكي  $h$  هي:  $z' - z_B = k(z - z_B)$  و بما أن  $h(C) = A'$  فإن:  $z_{A'} - z_B = k(z_C - z_B)$

و منه:  $k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B}$  و بعد إنجاز مختلف الحسابات نحصل على:  $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$

و منه الكتابة المركبة للتحاكي  $h$  هي:  $z' = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$

التمرين الثالث:

(أ) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يأتي:  $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}]$

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} \left[1 + \frac{e^{2x}}{x} - e^{2x}\right] = -\infty$  و  $f(x) = \frac{1}{2}x \left[1 + \frac{(1-x)}{x}e^{2x}\right] = -\infty$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} [(1-x)e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left[ e^{2x} - \frac{2x.e^{2x}}{2} \right] = 0 \text{ لدينا:}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = \frac{1}{2}x$  مستقيم مقارب للمنحنى  $C_f$  بجوار  $-\infty$ .

لدراسة وضعية  $C_f$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  ندرس حسب قيم  $x$  إشارة الفرق  $f(x) - y$ .

لدينا:  $f(x) - y = \frac{1}{2}(1-x).e^{2x}$  و منه فإشارة  $f(x) - y$  من نفس إشارة  $1-x$  لأن  $e^{2x} > 0$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
الوضعية	$C_f$ فوق $(\Delta)$		$C_f$ تحت $(\Delta)$

3. لتكن الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يأتي:  $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1-2x)e^{2x}) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{2x} - 2xe^{2x}) = 1 \text{ لدينا:}$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا:  $g'(x) = -4xe^{2x}$ .

إشارة  $g'(x)$  هي إذن عكس إشارة  $x$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

نلاحظ أن المعادلة  $g(x) = 0$  لا تقبل حلوًا في المجال  $]-\infty; 0[$  لأن العدد 0 ليس عنصرًا من  $]1; 2[$ .

الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال  $]0; +\infty[$  و تأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; 2[$  و  $]0 \in ]-\infty; 2[$ .

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  في المجال  $]0; +\infty[$ .

و بالإضافة إلى ذلك لدينا:  $g(0,6) \approx 0,33$  و  $g(0,7) \approx -0,62$  أي أن  $g(0,6) \times g(0,7) < 0$ .

و هكذا فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  في المجال  $]0,6; 0,7[$ .

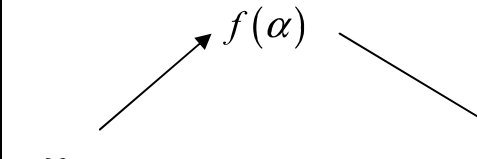
نستنتج هكذا إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

4. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2}g(x) \text{ أي } f'(x) = \frac{1}{2}[1 + (1-2x)e^{2x}] \text{ لدينا: و } \mathbb{R} \text{ على}$$

إذن إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $g'(x)$  و عليه جدول تغيرات  $f$  هو كالآتي:

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(\alpha)$ 		

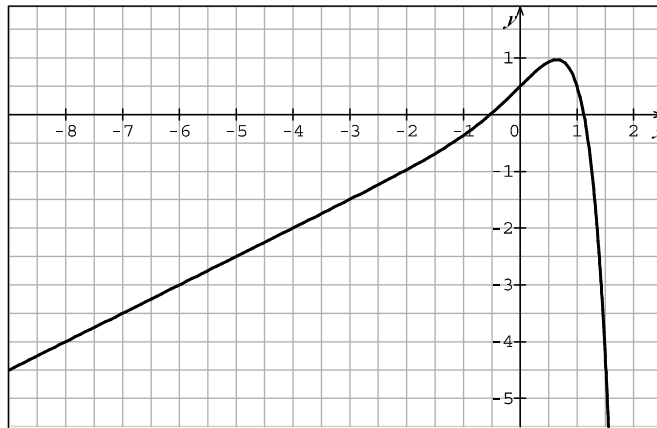
بما أن  $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$  فإن  $\frac{0,6 + 0,3e^{1,2}}{2} < f(\alpha) < \frac{0,7 + 0,4e^{1,4}}{2}$  و هكذا نجد أن:  $0,79 < f(\alpha) < 1,16$ .

5. حساب  $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ،  $f(-1)$  و  $f(1)$  استنتاج إشارة  $f(x)$  على المجال  $]-\infty; -1]$ .

$$. f(1) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) \approx -4,27, f(-1) \approx -0,36$$

نستنتج هكذا أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; -1]$ ،  $f(x) < 0$  لأن  $f(x) < f(-1)$  على  $]-\infty; -1]$  ما دام الدالة  $f$  متناقصة تماما على هذا المجال.

6. رسم المنحني  $C_f$ :



(ب) لتكن  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; -1]$  بحيث:  $F(1) = \frac{1}{4}$ .

1. بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; -1]$  فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي

فهي تقبل دالة أصلية وحيدة  $F$  تحقق  $F(1) = \frac{1}{4}$ .

2. من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; -1]$ ،  $F'(x) = f(x)$ ، و بما أن من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; -1]$ ،

$f(x) < 0$  فإن الدالة  $F$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; -1]$ .